Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 2

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ - ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν οι α, β, γ $\in$ R ώστε τα πολυώνυμα $P(x)=(α-β)x^2+γx-2α+β-1$ και $Q(x)=(α+β+8)x^2+(2-γ)x-3α-2$ να είναι ίσα.

2. Να βρείτε τις τιμές του α ώστε το $P(x)=(α^2-4α+3)x^3+(α^3-α)x^2-(α^2+2α-3)x+α^2-1$ να είναι μηδενικού βαθμού

3. Για ποιές τιμές των α,β,γ το πολυώνυμο $P(x)=4x^3-2x^2+x-1$ παιρνει την μορφή $2x^2(2x-α)+(β-γ)x+α+γ$

4. Να βρεθεί πολυώνυμο P(x) τέτοιο ώστε $(2x+3)P(x)=2x^3+x^2-x+3$

5. Να βρεθεί πολυώνυμο P(x) τέτοιο ώστε $(2x+3)P(x)=2x^3-x^2+9$ και κατόπιν να λυθεί η εξίσωση $2x^3-x^2+9=0$

6. Να βρείτε πολύωνυμο P(x), για το οποίο ισχύει : $(x-3)P(x)=x^3-3x^2-4x+12$ και κατόπιν να λυθεί η εξίσωση $x^3-3x^2-4x+12–0$

7. Έστω τα πολυώνυμα $P(x)=x^4-4x^2+3$ και $Q(x)=3x^2+1$ Αν η διαίρεση P(x) :Q(x) δίνει υπόλοιπο $υ=\frac{40}{9}$ να βρείτε το ποιλίκο της (χωρίς να γίνει η διαίρεση)

8. Αν τα πολυώνυμα $P(x)=(α-β)x^3+(α+β-4)x^2+αx+2γ$ και $Q(x)=(β-2)x^3-(β-4)x+α-γ+1$ είναι ίσα να βρείτε τα α,β,γ και το βαθμό τους

9. Να βρείτε πολυώνυμο P(x) ώστε $P(x)+[P(x)]^2=2x(2x+3)+2$

10. Να βρείτε πολυώνυμο P(x) ώστε $[P(x)]^2-P(x)=(x-1)(x-2)$

11. Να βρεθεί πολυώνυμο P(x) δευτέρου βαθμού που να ικανοποιεί την ισότητα $P(x+1)=P(-x)$ για όλα τα $x\in R$ και να ισχύουν $P(1)=2$, $P(-1)=4$.

12. Αν $P_1(x)=2x^2-3x+1$, $P_2(x)=x-1$ και $P_3(x)=(α+β)x^2-(2α+β)x-α+β+γ$, να βρεθούν οι α, $β,γ\in R$ έτσι ώστε να ισχύει : $P_1(P_2(x))=P_3(x)$.

13. Να βρείτε πολυώνυμο P(x) πρώτου βαθμού ώστε i) $P\big(P(x)\big)=x-1$

14. Να προσδιορισθούν οι $α,β\in R$ ώστε για κάθε $x\in R$ με $x\neq 2$ και $x\neq 3$ η παράσταση $\frac{3x-1}{x^2-5x+6}$ να γράφεται με τη μορφή $\frac{α}{x-2}+\frac{β}{x-3}$.

15. Να βρεθούν οι $α,β,γ\in R$ ώστε η παράσταση $\frac{2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)}$ να γράφεται με τη μορφή

$$\frac{α}{x+1}+\frac{βx+γ}{x^2+x+1}.$$

16. Να βρείτε πολυώνυμο P(x) ώστε $P(x+1)=3x^2-x$

17. Να βρείτε πολυώνυμο P(x) ώστε $P(x–1)=x^2–3x–5$

18. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $λ\in R$ το βαθμό του $P(x)=(λ^3-λ)x^3-(λ^2+λ)x^2+λ+1$.

19. Να αποδειχθεί ότι αν το πολυώνυμο $P(x)=(α–1)x^3+βx–1$ έχει ρίζα το 1 τότε το πολυώνυμο $Q(x)=x^4+(α–2)x^3–βx^2–1$ έχει ρίζα το –1

20. Να βρείτε τους $α,β\in R$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^3+αx^2+(β–2)x+6$ να έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 2.

21. Να βρεθούν τα υπόλοιπα των παρακάτω διαιρέσεων :
α) $(2x^{1991}+3x^{1992}-4x^{1993})$ **:** $(x+1)$ β) $(4x^{2ν}-x^{2ν+1}+5x^{2000})$ **:** $(x+1)$

22. Να υπολογιστούν οι κ,λ ε R ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^3–λx^2+κx+2$ διαιρούμενο με x–2 και x+3 να δίνει αντίστοιχα υπόλοιπα 8 και -52 αντίστοιχα

23. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^4-αx^3+(β-2α)x^2- αx+β$. Να βρείτε τους α , β ε R ώστε το P(x) να διαιρείται ακριβώς με το x^2-1

24. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=(x-2)^{2000}+(x-1)^{1000}-1$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Π(x)=x^2-3x+2$.

25. Να εξετάσετε αν το $Q(x)=3x^2–4x–2$ είναι παράγοντας του $P(x)=6x^5+3x^4–14x^3–4x^2+2x+4$

26. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=αx^3+(2β–1)x^2+(α–β)x+1$. Να βρείτε τα α,β ε R ώστε το P(x) να έχει παράγοντα το x–1 και το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x) : (x+1) να είναι 4

27. Για ποιές τιμές των κ,λ το πολυώνυμο $P(x)=x^4+κx^3–λx^2–x+κ+1$ έχει παράγοντα το (x–1)(x+2)

28. Να προσδιοριστούν οι $α,β,γ\in R$ όταν το $P(x)= x^4+αx^3+βx^2-12x+γ$ έχει παράγοντες όλους τους παράγοντες του $Q(x)=x^3-4x^2+3x$.

29. Να βρεθούν οι $κ,λ\in R$ ώστε το x-2 να είναι παράγοντας του $g(x)=(2λ-κ)x^3+2(κ^2+λ^2)x+20$.

30. Να βρεθούν οι $α,β\in R$ αν το πολυώνυμο $P(x)=α^2x^4+2αβx^3+2β^2x^2-4βx+2$ διαιρούμενο με x-1 αφήνει υπόλοιπο -2

31. Αν το πολυώνυμο P(x) διαιρούμενο με τα πολυώνυμα x-1 και x-2 δίνει αντίστοιχα υπόλοιπο 2 και 3, να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το (x-1)(x-2).

32. Έστω το πολυώνυμο P(χ) με ακέραιους συντελεστές και P(1)=P(3)=5 .Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x): (x^2-4x+3) είναι Υ=5 .

33. Ένα πολυώνυμο P(x) διαιρούμενο με το x–1 δίνει υπόλοιπο 2 και διαιρούμενο με το x+3 δίνει υπόλοιπο 30. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το (x–1)(x+3)

34. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)= (2x^2 - 1)^{52} +3(x^2 - 1)^{31}–7x^{21} + 6x - 3$ με το πολυώνυμο: (x^2-1).

35. Αν το πολυώνυμο P(x) βαθμού $\nu \geq 2$ διαιρούμενο με το x^2-1 δίνει υπόλοιπο $x+3$, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $x+1$.

36. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta \in R$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)= x^5-3x^3-x^2+\alpha x+\beta$ διαιρούμενο με το x^2-4 δίνει υπόλοιπο $4x+1$

37. Δίνεται το πολυώνυμο P(x)με βαθμό $\nu>2$ Αν το P(x) διαιρεθεί με το $x-5$ δίνει πηλίκο $\Pi_1(x)$ ενώ αν διαιρεθεί με το $x-3$ δίνει πηλίκο $\Pi_2(x)$ Να αποδείξετε ότι $\Pi_1(3)= \Pi_2(5)$

38. Αν ακέραιο πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x-3, να δειχθεί ότι το πολυώνυμο Q(x)=P(4x-5) έχει παράγοντα το x-2.

39. Αν για το πολυώνυμο P(x) ισχύει P(x)=P(2-x) και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x–2 είναι 3 να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $2x-x^2$

40. Αν P(x) πολύωνυμο και ρ ρίζα του P(x)-x τότε ο ρ είναι και ρίζα του πολυώνυμου P(P(x))-x.

41. Αν το πολυώνυμο P(x) έχει σταθερό όρο 1 , διαιρούμενο με το x-κ δίνει πηλίκο $\pi_1(x) = x^2 - 4x + 2$ και διαιρούμενο με το x-λ δίνει πηλίκο $\pi_2(x) = x^2 - 3x + 4$, να βρεθεί το P(x) καθώς επίσης και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων

42. Να δειχθεί ότι αν αν $\alpha\neq\beta$, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυώνυμου της f(x) δια του (x-α) (x-β) είναι $\upsilon(x)=\dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}x+\dfrac{\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)}{\beta-\alpha}$.

43. Αν το πολυώνυμο $P_1(x)$ διαιρεί το $P_2(x)$ και το $P_2(x)$ διαιρεί το $P_3(x)$, δείξτε ότι το $P_1(x)$ διαιρεί το $P_3(x)$.

44. Αν το πολυώνυμο P(χ) διαιρούμενο με x+3, x+2, x–2 , δίνει αντίστοιχα υπόλοιπα 4,3,1 τότε να βρεθεί το υπολοιπο της διαίρεσης P(x) : Π(x) όπου Π(x) =(x+3)(x+2)(x–2)

45. Αν ο αριθμός 3 είναι ρίζα ενός πολυωνύμου P(x) να αποδειχθεί ότι το –1 είναι ριζα του πολυωνύμου Q(x)=P(2x+5)

46. Αν το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το χ-1 να δείξετε ότι το πολυώνυμο R(x)=P(4x–7) έχει παράγοντα το x–2

47. Δίνεται το πολυώνυμο P(χ) για το οποίο ισχύει P(x–1)=P(x) για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο Q(x) =P(χ) - P(0) έχει παράγοντα το x^2-x

48. Έστω το πολυώνυμο P(x) το οποίο διαρούμενο με το x –1 δίνει υπόλοιπο 2. Να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο $Q(x)=P(3x-5)+x^2-2x-2$ έχει παράγοντα το x –2

49. Οι διαιρέσεις P(x) : (x-2) και P(x) : (x+3) δίνουν αντίστοιχα υπόλοιπα 1 και 6 .Να δείξετε ότι το πολυώνυμο x^2+x-6 διαιρεί το πολυώνυμο (P(x)-1)(P(x)-6).

50. Να γίνουν οι διαιρέσεις : α) $(6x^3-19x^2+20x-10) : (3x^2-5x+6)$
β) $(2x^4-x^3+3x^2-2) : (x^3-x)$ γ) $(3x^2-6x^3-3x+2x^4+1) : (1+x^2-3x)$ δ) $x^5 : (x-1)^2$

51. Σε μία διαίρεση ο διαιρετέος είναι $-x^4+x^2-1$, ο διαιρέτης x^2+x+1 και το πηλίκο $-x^2+x+1$. Να βρεθεί το υπόλοιπο χωρίς να γίνει η διαίρεση.

52. Πολυώνυμο P(x) διαιρούμενο με το $x-1$ δίνει υπόλοιπο 3, διαιρούμενο με το $x+2$ δίνει υπόλοιπο 9. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x-1)(x+2)$.

53. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων
α) $(x^4-5x^3+7x-3) : (x+1)$ β) $(x^4+x^2+1) : (x-2)$ γ) $(2x^4+x^3-2x^2+3x+2) : (x+\frac{1}{2})$

54. Να εξετάσετε με το σχήμα Horner αν τα πολυώνυμα $x-2$ και $x+1$ είναι παράγοντες του
$P(x)=3x^4-3x^3-12x^2+16x-8$

55. Αν ν άρτιος θετικός ακέραιος, δείξτε ότι το $x+1$ είναι παράγοντας του $x^{\nu}-1$ και στη συνέχεια να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $(x^{\nu}-1) : (x+1)$.

56. Να προσδιορισθεί ο $\lambda\in R$ ώστε το $x+1$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)=(\lambda-1)x^3-2(\lambda+1)x^2-(6\lambda+2)x-7$ και μετά να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

57. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε το $P(x)=x^4-x^3-(2\alpha+5)x^2+(\alpha+\beta)x-4\alpha-\beta$ να έχει παράγοντα το $Q(x)=(x-2)(x+1)$ και κατόπιν να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$

58. Να βρείτε τους α,β ε R ώστε το πολυώνυμο $P(\chi)=x^3-\alpha x^2-(\alpha+\beta)x+6$ να έχει παράγοντα το x^2+x-2 .Στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$

59. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε το $P(x)=x^4-\alpha x^3-9x^2+\beta x-6$ να έχει παράγοντα το $Q(x)=x^2-x-6$ και κατόπιν να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$

60. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε το $P(x)=x^4-\alpha x^3-(\alpha+2\beta)x^2+x+6$ να έχει παράγοντα το x^2-1 και κατόπιν να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$

61. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε το $P(x)=x^4-\alpha x^3-(\alpha+2\beta)x^2+\alpha x+2$ να έχει παράγοντα το x^2-2x+1 και κατόπιν να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$

62. Να βρεθούν $\alpha,\beta\in R$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^4+(\alpha-\beta)x^3+2\alpha x^2-5x+4$ να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

63. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε το πολύωνυμο $P(x)=x^4-x^3-6x^2+\alpha x+\beta$ να έχει παράγοντα το $(x-2)^2$ και μετά να λυθεί η $P(x)=0$.

64. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε το πολύωνυμο $P(x)=x^4-x^3+(\alpha+2)x^2+\beta x+2\alpha$ να έχει παράγοντα το x^2-x+2

65. Να βρείτε τα α,β ώστε το πολυώνυμο $P(x)=-2x^3+\alpha x^2-\beta x+5\alpha$ έχει παράγοντα το x^2-x+1

66. Να βρείτε τους α,β R ώστε το πολυώνυμο $P(\chi)=x^{1998}-\alpha x+\beta$ να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

67. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^4+x^3-(\alpha^3+1)x^2-\alpha^2x+4=0$.
α) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση έχει ρίζα το -1.
β) Να λύσετε τις εξισώσεις που προκύπτουν για τις τιμές του α που θα βρείτε.

68. Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $2x^3-7x^2+2x+3=0$ β) $3x^3+10x^2+x-6=0$ γ) $2x^3+15x^2+34x+24=0$
δ) $x^3-x^2-10x-8=0$ ε) $x^8+3x^4+2x^2+1=0$

69. Να λυθούν οι ανισώσεις : α) $x^3+9x^2+23x+15>0$ β) $x^3-2x^2-5x+6<0$ γ) $2x^3+x^2-8x-4\leq 0$
δ) $x^4-5x^3+5x^2+5x-6\geq 0$ γ) $(2x+1)^3(-x+2)(3x-1)(-x+1)^2<0$

70. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = kx^3 - (k + \lambda)x^2 + \lambda x + 1$.

α. Αν $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 7$ και $P(-1) = 23$, να βρείτε τα k και λ . Μονάδες 8

β. Να γίνει η διαίρεση του P(x), για $k = -6$ και $\lambda = -5$, με το πολυώνυμο $2x + 1$ και να γραφεί το P(x) με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης. Μονάδες 8

γ. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) > 7$ για $k = -6$ και $\lambda = -5$. Μονάδες 9

71. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f με $f(x)=2x^3+5x^2-4x-3$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x.

72. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f με $f(x)=x^4-2x^3+7x-4$ βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της g με $g(x)=2x^3+x^2-9x+2$

73. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)= \chi^4+\kappa\chi^3-\lambda\chi^2-\chi+\kappa+1$. Να βρείτε τους κ ,λ ε R ώστε το P(χ) να έχει παράγοντα το $\Phi(\chi)=\chi^2+\chi-2$. Στη συνέχεια για τις τιμές των κ,λ που βρήκατε να λύσετε την ανίσωση $P(X) > 0$

74. Εξετάστε αν έχουν ρητές ρίζες οι εξισώσεις $x^\nu-\lambda x+1=0$ με $\nu\in N$, $\nu\geq 2$ και $\lambda\in Z$ και $x^{1998}+2\kappa x+2=0$ με $\kappa\in Z$.

75. Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $x^8-13x^4-48=0$ β) $2(x^2+\frac{1}{x^2})-11(x+\frac{1}{x})+19=0$

γ) (1+x)=2(1+x) δ) $x^3+\frac{1}{x^3}=6(x+\frac{1}{x})$ ε) $\frac{1+x^3}{1-x}+\frac{1-x^3}{1+x}=1$

76. Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $3x^3-13x^2+13x-3=0$
β) $6x^4-25x^3+38x^2-25x+6=0$ γ) $x^4+x^3-16x^2-2x+4=0$

77. Για ποιες τιμές των $\alpha,\beta\in R$ η εξίσωση $(\alpha+\beta-3)x^4+(2\alpha+3\beta-5)x^3+5x^2+(2\beta-\alpha+\beta)x+\alpha-\beta=0$ γίνεται διτετράγωνη;

78. Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $(x^2-3x+1)^2-10(x^2-3x-3)-51=0$ β) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$
γ) $x(2x+1)(x-2)(2x-3)=63$ δ) $(2x^2+3x-1)^2-10x^2-15x+9=0$

79. Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $2\sigma\upsilon\nu^4x+17\sigma\upsilon\nu^2x-9=0$ β) $2\eta\mu^3x-3\eta\mu^2x-3\eta\mu x+2=0$
γ) $\varepsilon\varphi^3x-2\varepsilon\varphi^2x-\varepsilon\varphi x+2=0$

80. Να λυθούν οι ανισώσεις : α) $x^2+\frac{2}{2x-1}\geq\frac{1}{x(2x-1)}$

β) $\frac{3x^2-1}{x-1}-\frac{2}{x^2-x}>\frac{x^2-3x+2}{x}$ γ) $\frac{x+2}{3x+1}\geq\frac{x-2}{2x-1}$

81. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$ β) $\sqrt{3x-5}-\sqrt{2x-5}=1$ γ) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{8-2x}=\sqrt{x-1}$

δ) $\sqrt[3]{5x-7}=x-1$ ε) $5x\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x^3}=296$ στ) $\sqrt{x-\sqrt{x-1}}=\sqrt{3x+3}$

82. Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-4=0$ β) $x^2-6x-2\sqrt{x^2-6x+2}=1$

γ) $x-3\sqrt{2x^2-11x+5}=12x-2x^2-7$ δ) $x(x+1)+3\sqrt{2x^2+6x+5}=25-2x$

ε) $\sqrt{\dfrac{2x+2}{x+2}}-\sqrt{\dfrac{x+2}{2x+2}}=\dfrac{7}{12}$ στ) $\sqrt{\dfrac{x+3}{5x+2}}+\sqrt{\dfrac{5x+2}{x+3}}=\dfrac{13}{6}$

83. Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x^2-4}+\sqrt[3]{2x+4}=0$ β) $\dfrac{5}{x+\sqrt{x^2+5}}-\dfrac{5}{x-\sqrt{x^2+5}}=6$

γ) $\sqrt{4x^4-9x^2-2x+3}=x^2+x$ δ) $2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1}$

84. Να λυθούν οι ανισώσεις : α) $\sqrt{3-x}\geq\sqrt{x+1}$ β) $\sqrt{2x-3}<x-1$ γ) $\sqrt{2x+1}>x-1$

δ) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-8}>3$ ε) $\sqrt{3x+2}>\sqrt{x^2-3x+2}$

85. Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $\sqrt{x-3}=\lambda$ β) $\sqrt{x^2+3}=x+\lambda$

86. Αν λ θετικός και ακέραιος, να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{\lambda^3-x}=3-\lambda$.

87. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=4ημα\cdot x3+4συν^2α\cdot x^2–8x+3$.
Αν το P(x) έχει για παράγοντα το Q(x) = x–ημα να βρείτε τη γωνία α αγνωρίζουμε ότι $α\in(-π, π)$.

88. Δίνεται πολυώνυμο P(χ) τρίτου βαθμού για το οποιο ισχυει η σχεση:
(x-π) P(συνx) –2xP(ημx) = x-2π, για κάθε $χ\in R$, (1).
α. Να υπολογίσετε τα P(0) και P(1)
β. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(χ) με το $χ^2$-χ
γ. Αν το πηλίκο της παραπάνω διαίρεσης είναι το 3x–1 να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 3x^2–x$

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ
ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ
ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 2 – 22649

α) Να βρείτε το υπόλοιπο και το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3-6x^2+11x-2):(x-3)$. (Μονάδες 10)

β) Αν $P(x)=x^3-6x^2+11x+\lambda$ να βρείτε το $\lambda\in R$, ώστε η διαίρεση $P(x):(x-3)$ να έχει υπόλοιπο 0. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 – 22680

Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x)=-2x^3+\lambda^2(x^2-1)+\lambda(x^3-1)+\lambda+9$

και $Q(x)=(\lambda+12)x^2+(\lambda-2)x^3+(\lambda^2-9)x$ με $\lambda\in R$.

α) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι και τα δύο πολυώνυμα είναι 3ου βαθμού. Συμφωνείτε με την άποψη αυτή; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) είναι ίσα. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 4 – 22762

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^4-12x^3+8x^2+\alpha x+\beta$, όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν το πολυώνυμο P(x) διαιρούμενο με (x + 1) αφήνει υπόλοιπο 16 + P(1) και διαιρούμενο με (x – 1) αφήνει υπόλοιπο 16 – P(– 1) , τότε:

α) να αποδείξετε ότι P(1) = 0 και P(– 1) = 16 . (Μονάδες 8)

β) να αποδείξετε ότι α = 4 και β = – 3. (Μονάδες 9)

γ) να αποδείξετε ότι: $P(4)\cdot P(5)\cdot P(6)\cdot P(7)\neq 0$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 – 22764

Έστω P(x) πολυώνυμο τρίτου βαθμού το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο x^2+2x και είναι τέτοιο, ώστε P (1) = 0 και P(2) = 8.

α) Να αποδείξετε ότι $P(x)=x^3+x^2-2x$. (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση P(x) = 8 . (Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την ανίσωση P(x) > 2 . (Μονάδες 9)

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ
ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 2 – 22640

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2+x-12$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το διώνυμο x – 3 είναι παράγοντας του P(x). (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 – 22641

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2-11x+30$ με $\alpha\in R$ για το οποίο γνωρίζουμε ότι έχει ρίζα το 5.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του α. (Μονάδες 12)

β) Για α = – 4 να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 22642

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2-11x+30$ με $\alpha\in R$ για το οποίο γνωρίζουμε ότι η τιμή του για x = 1 είναι 16 .

α) Να υπολογίσετε την τιμή του α. (Μονάδες 12)

β) Αν α = – 4 και το 2 είναι ρίζα της εξίσωσης $P(x)=0$, να προσδιορίσετε τις άλλες ρίζες της εξίσωσης . (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 22643

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $\beta,\gamma,\delta\in R$ το οποίο έχει ρίζες τους αριθμούς 0,1 και 3 .

α) Να δείξετε ότι β = – 4, γ = 3 και δ = 0. (Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2 – 22644

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\lambda^2x^3-4\lambda x+3$ με $\lambda\in R$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε το P(x) να έχει παράγοντα το x – 1. (Μονάδες 10)

β) Αν λ = 3 να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου P(x). (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 – 22645
Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2x^4-x^3+\alpha x^2-5x+6$ διέρχεται από το σημείο Μ(– 2,0),
α) να αποδείξετε ότι α = – 14. (Μονάδες 12)
β) να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y.
(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 22646
Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^3-10x^2+9x-2$.
α) Να κάνετε τη διαίρεση του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο $3x^2-4x+1$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης. (Μονάδες 15)
β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2 – 22647
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3+x^2-5x+2$.
α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x. (Μονάδες 15)
β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x. (Μονάδες 10)

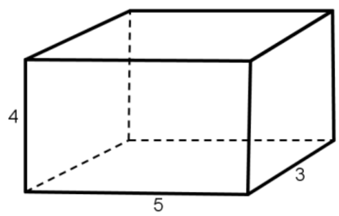
ΘΕΜΑ 2 – 22648
Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2-5x+\beta$ με $\alpha,\beta\in R$.
α) Αν το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x – 2 είναι ίσο με -4, να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$. (Μονάδες13)
β) Αν α = – 2 και β = 6 , να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 – 22681
Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+2$. Αν το P(x) έχει παράγοντα το x + 1 και P(2) = 18,τότε:
α) Να αποδείξετε ότι α = 1 και β = 2. (Μονάδες 10)
β) Να λύσετε την εξίσωση: P(x) = 0. (Μονάδες 8)
γ) Να λύσετε την ανίσωση: $P(x)\le 0$. (Μονάδες 7)

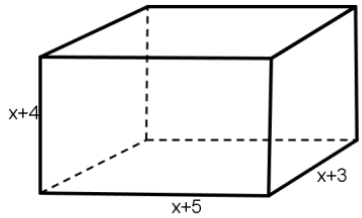
ΘΕΜΑ 2 – 22682
Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+(k-6)x^2-7x+k$.
α) Να βρείτε για ποια τιμή του $k\in R$, το 2 είναι ρίζα του P(x). (Μονάδες 12)
β) Αν κ = 6, να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 22683
Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+6$.
α) Αν γνωρίζετε ότι η τιμή του πολυωνύμου για x = 1 είναι ίση με 10 και P(2) = 10, να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$. (Μονάδες 12)
β) Αν α = – 5 και β = 8, να λύσετε την ανίσωση $P(x)>10$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 22684
Μια εταιρεία κατασκευάζει κουτιά σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 3cm, 4cm και 5cm.
Ένας νέος πελάτης ζήτησε από την εταιρεία να κατασκευάσει κουτιά με όγκο 120 cm^3, δηλαδή διπλάσιο από εκείνον που κατασκευάζει.



Η εταιρεία αποφάσισε να κατασκευάσει τα κουτιά που ζήτησε ο πελάτης της, αυξάνοντας τις διαστάσεις του αρχικού κουτιού κατά σταθερό ακέραιο μήκος x.



α) Να αποδείξετε ότι το x θα είναι λύση της εξίσωσης $x^3+12x^2+47x-60=0$.

(Ο όγκος V ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α, β, γ δίνεται από τον τύπο: V = α·β·γ). (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο x λύνοντας την εξίσωση που δίνεται στο ερώτημα α). (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 22685

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=(\alpha^3+2)x^3+x^2+1$ και $Q(x)=3\alpha x^3+x^2+1$, όπου α θετικός πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε το α ώστε τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) να είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Αν α = 1, να αποδείξετε ότι η εξίσωση P(x) = 0 δεν έχει ακέραιες ρίζες. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 – 22686

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+2x^2-4x+\lambda$.

α) Αν P(– 1) = 6, να δείξετε ότι λ = 1. (Μονάδες 11)

β) Να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0. (Μονάδες 14)

ΘΕΜΑ 2 – 22687

Το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^2-1)x^4-2(\lambda-1)x^3+2\lambda x^2+\lambda+1$ είναι 3ου βαθμού.

α) Να δείξετε ότι λ = – 1. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το P(x). (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις ρίζες του P(x). (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2 – 22688

Το πολυώνυμο P(x) αν διαιρεθεί με το (x – 2) δίνει πηλίκο και υπόλοιπο τον πραγματικό αριθμό υ.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης. (Μονάδες 8)

β) Αν P(1) = 10, να βρείτε το υ. (Μονάδες 9)

γ) Αν υ = 10 ,να βρείτε το P(x). (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 4 – 22734

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό Ε = 30 cm^2 του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 1cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί x, y ικανοποιούν τις σχέσεις: $y=\frac{60}{x}$ και $(x+1)^2=x^2+y^2$.(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι ο αριθμός *x* ικανοποιεί την εξίσωση: $2x^3+x^2-3600=0$. (Μονάδες 4)

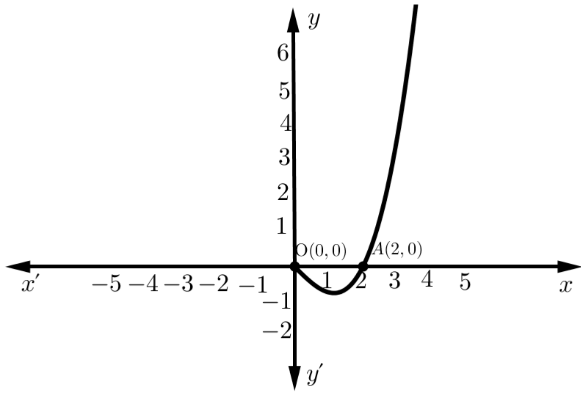
γ) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 15, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου. (Μονάδες 12)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλο ορθογώνιο τρίγωνο (με διαφορετικά μήκη πλευρών από αυτά που προσδιορίσατε στο ερώτημα γ)) το οποίο ικανοποιεί τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 – 22759

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\gamma x+\delta$



, $x\in R$ και γ, δ πραγματικές σταθερές.

α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να αποδείξετε ότι γ = – 1 και δ = 0. (Μονάδες 5)

β) Θεωρώντας τώρα δεδομένο ότι

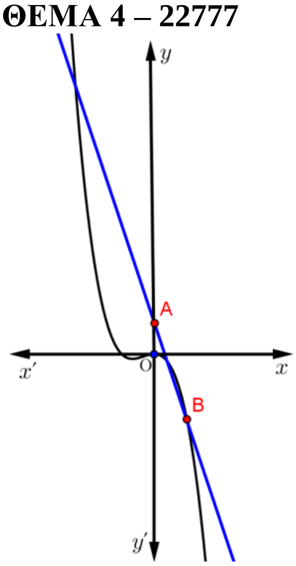
$f(x)=\frac{1}{4}x^3-x$, $x\in R$:

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=f(x)$, για κάθε $x\in R$. (Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για x < 0. (Μονάδες 5)

iii. Να επαληθεύσετε ότι $f(1)=-\frac{3}{4}$ και, στη συνέχεια, να λύσετε τις εξισώσεις $f(x)=-\frac{3}{4}$ και $f(x)=\frac{3}{4}$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 – 22777



Στο σχήμα φαίνονται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=-x^3-x^2$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α (0, 1) και Β (1,– 2).

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας. (Μονάδες 7)

β) Αν η ευθεία έχει εξίσωση $y = -3x + 1$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $-x^3-x^2<-3x+1$. (Μονάδες 9)

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ
ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 4 – 22766

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\kappa^2-1)x^4+\frac{1}{2}(\kappa+1)x^3+(\kappa-1)x^2-3\kappa x+\lambda$, $\kappa,\lambda\in R$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ αν το πολυώνυμο P(x) είναι 3ου βαθμού και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x – 1 είναι ίσο με – 4. (Μονάδες 7)

β) Για κ = 1 και λ = – 2

i. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το x – 1. (Μονάδες 5)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) + 4 = x^2 - 1$. (Μονάδες 7)

iii. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{(x-1)^2\cdot(x+2)}\geq 1$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4 – 22769

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\alpha x^2+\beta x+2$ με $\alpha,\beta\in R$.

α) Αν το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x – 2 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x + 1 είναι ίσο με – 6 , να βρείτε τα $\alpha, \beta \in R$. (Μονάδες 7)

β) Αν α = – 5 και β = 1, να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0 . (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $2\cdot συν^3(3ω)+5\cdot ημ^2(2ω)+συνω-3=0$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 – 22772

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-x^3+\kappa x^2+x+\lambda$ με $\kappa,\lambda \in R$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\kappa,\lambda \in R$, όταν το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το 1 και παράγοντα το x + 2 . (Μονάδες 7)

β) Για κ = – 7 και λ = 6 να λυθεί η εξίσωση P(x) = 0 . (Μονάδες 9)

γ) Για κ = – 7 και λ = 6 να λυθεί η ανίσωση $\frac{P(x)}{x-5} \geq 0$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4 – 22773

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2-7x+\alpha+5$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x είναι ίσο με 6 και ότι έχει ρίζα το 1.

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β. (Μονάδες 8)

β) Για α = 1 και β = 0, να λύσετε:

i. την ανίσωση $P(x) \geq 0$. (Μονάδες 8)

ii. την εξίσωση $\sqrt{P(x)}=x-1$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4 – 22774

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha^3x^2-\alpha^2x-\alpha$, με $\alpha \in R$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση P(x) : (x – α) και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. (Μονάδες 7)

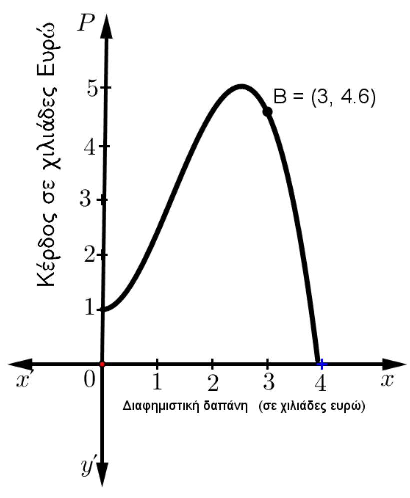
β) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες το (x – α) διαιρεί το P(x). (Μονάδες 6)

γ) Αν α = – 1, τότε:

i. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$. (Μονάδες 6)

ii. Να λύσετε την ανίσωση $(x+1)\cdot P(x) \leq 0$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4 – 22775



Μια εταιρεία εκτίμησε ότι το κέρδος της P (σε χιλιάδες ευρώ) από την πώληση ενός συγκεκριμένου προϊόντος ήταν:
$P(x)=-0.5x^3+1.9x^2+1,\ 0 \leq x \leq 4$ όπου x είναι η διαφημιστική δαπάνη (σε χιλιάδες ευρώ). Για αυτό το προϊόν, ξόδεψε για διαφήμιση 3 χιλιάδες ευρώ και το κέρδος της ήταν 4,6 χιλιάδες ευρώ.

α) i. Να χρησιμοποιήσετε την παραπάνω γραφική παράσταση της συνάρτησης P(x) για να εκτιμήσετε ένα άλλο ποσό x που θα μπορούσε να δαπανήσει για διαφήμιση η εταιρεία ώστε να έχει το ίδιο κέρδος. (Μονάδες 5)

ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του ερωτήματος i. (Μονάδες 10)

β) Πόσα χρήματα πρέπει να δαπανήσει η εταιρεία για διαφήμιση, ώστε το κέρδος της να είναι μεγαλύτερο από 4,6 χιλιάδες ευρώ; (Μονάδες 10)