ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. Δίνεται η συνάρτηση F με $F(x)=\left(\frac{5\alpha-7}{\alpha^2-1}\right)^x$. Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε :
α) Να ορίζεται η F β) Να είναι γνησίως αύξουσα

2. Να βρεθεί το Π.Ο της συνάρτησης F με $F(x)=\left(\frac{1}{x}-4x\right)^x$.

3. Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $5^{\sqrt{x}}=625$ β) $3^{x^2-9x+11}=27$ γ) $2^{x^2-2}=8$ δ) $3^x=81$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $27^{\frac{x+1}{x-2}}=3^{2x-4}$ β) $(\sqrt{3}+1)^{x^4-3x^2-4}=1$
γ) $\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-7}=\left(\frac{4}{3}\right)^{7x-3}$ δ) $\sqrt{125^{x-1}}=5^{2x-1}$ ε) $2^{3^x}=512$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $18^{4-x}=(54\sqrt{2})^{3x-2}$ β) $\frac{e^{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{e}=e^{-2\sigma\upsilon\nu^2 x-2\sigma\upsilon\nu x}$

6. ****** Να λύσετε τις εξισώσεις
i) $3^{\eta\mu 2x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ **ii)** $3^{\eta\mu 2x-\sigma\upsilon\nu x}=9^{1-2\eta\mu^2\frac{x}{2}}$ **iii)** $2^{\eta\mu x}\cdot\left(4^{\eta\mu x}\right)^{\sigma\upsilon\nu x}=\sqrt[5]{32^{\eta\mu 3x}}$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $3^{x+2}+3^{x-1}+5\cdot 3^x-3^{x-2}=128$
β) $2^{x+3}-2^{x+2}+2^{x+1}=48$ γ) $2^{x^2+x+1}-3\cdot 2^{x^2+x}+2^{x^2+x-2}=-48$

8. ***** Να λύσετε τις εξισώσεις
i) $2^x-5\sqrt{2^x}+4=0$ **ii)** $5\cdot 2^x=2^{x+3}-3\sqrt{2}$ **iii)** $3^{x+1}-28+9\cdot 3^{-x}=0$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις :
α) $2\cdot 9^x-3^{x+1}-135=0$ β) $5^{x^2+1}+25^{x^2}=6$ γ) $3^x-4\sqrt{3^x}+3=0$

10. Να λυθούν οι εξισώσεις :
α) $2^x-6\cdot 2^{-x}=-1$ β) $x^x-x^{-x}=3(1+x^{-x})$ γ) $2\cdot 4^{2x}-5\cdot 8^x-7\cdot 2^{2x+1}+5\cdot 2^x+12=0$

11. Να λυθούν οι εξισώσεις :
α) $16^{\eta\mu^2 x}+16^{\sigma\upsilon\nu^2 x}=10$ β) $2^{\eta\mu x+1}+2^{-\eta\mu x}=3$ γ) $\frac{11}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{\eta\mu\frac{\pi+2x}{4}\sigma\upsilon\nu\frac{2x-\pi}{4}}=\frac{9}{50}+\frac{7}{4}\sqrt{\left(\frac{4}{10}\right)^{1+\eta\mu x}}$
δ) $2^{\sigma\upsilon\nu x}+2\cdot 2^{-\sigma\upsilon\nu x}-3=0$

12. Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $3\cdot 2^{x-4}-2^{x-1}=5^{x-2}-6\cdot 5^{x-3}$ β) $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$

γ) $3^{x+1}-2^{x}=3^{x-1}+2^{x+3}$ δ) $2\cdot 5^{x-2}-3\cdot 2^{x-3}=12\cdot 5^{x-3}-2^{x}$ ε) $4^{x}-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$

13.. Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $7^{x+\frac{3}{4}}-5^{3x}=2(7^{x+\frac{1}{3}}+5^{3x-1})$ β) $2^{2x-1}+3^{x}+4^{x+\frac{1}{2}}-\sqrt{9^{x+1}}=0$

γ) $\sqrt{2^{6x-13}}-3^{2(x-2)}=\sqrt{8^{2x-3}}-3^{2x-3}$ δ) $x^2\cdot 2^{x+1}+2^{|x-3|+2}=x^2\cdot 2^{|x-3|+4}+2^{x-1}$

14. Να βρεθούν τρεις αριθμοί που είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου όταν το άθροισμα των αντιστρόφων τους είναι $\frac{39}{28}$ και ο μεσαίος είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης $2^{x}+4=5\sqrt{2^{x}}$.

15. Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $2\cdot 4^{x}+3\cdot 9^{x}=5\cdot 6^{x}$ β) $5\cdot 3^{2x}+3\cdot 2\cdot 5^{x}=8\cdot 15^{x}$

γ) $3^{2ημx+1}-5\cdot 6^{ημx}+4^{ημx+\frac{1}{2}}=0$

16. Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $(2+\sqrt{3})^{x}+(2-\sqrt{3})^{x}=14$ β) $)(7-4\sqrt{3})^{x}=2+\sqrt{3}$

γ) $(\sqrt{3-\sqrt{8}})^{x+1}+(\sqrt{3+\sqrt{8}})^{x+1}=2$ δ) $(9+4\sqrt{5})^{x}+(\sqrt{5}-2)^{2x}=18$

17. Να λυθούν τα συστήματα : α) $\begin{cases}2^{x}=8^{y+1}\\ 9^{y}=3^{x-9}\end{cases}$ β) $\begin{cases}3^{2x-y}=27\\ 5^{5x-4y}=1\end{cases}$ γ) $\begin{cases}2^{x}\cdot 4^{x+2y}=1024\\ 5^{x-3y-1}=\dfrac{1}{25}\end{cases}$

18. Να λυθούν τα συστήματα : α) $\begin{cases}5^{x}-4^{y+1}=9\\ 5^{x-1}+4^{y+2}=69\end{cases}$ β) $\begin{cases}3\cdot 2^{x-1}-2^{x+y-1}+1=0\\ 5\cdot 2^{x-3}-2^{x+y-5}-1=0\end{cases}$

19. Να λυθούν τα συστήματα :α) $\begin{cases}2^{5y-x}=2^{2x-y}\\ 2^{x}-2^{4y}=64\end{cases}$ β) $\begin{cases}2^{x}=3y\\ 3^{x}=2y\end{cases}$ γ) $\begin{cases}2^{x}\cdot 3^{y}=54\\ 3^{x}\cdot 2^{y}=24\end{cases}$

20. Να λυθούν τα συστήματα : α) $\begin{cases}2^{x}+3^{y}=17\\ 4^{x}-9^{y}=-17\end{cases}$ β) $\begin{cases}2^{x^2-y^2}=256\\ 5x+3y=2(10-y)\end{cases}$

21. Να λυθούν τα συστήματα : α) $\begin{cases}4^{x-1}\cdot 2^{y-2}=8\\ 3^{x-2}\cdot 3^{y-4}=\dfrac{1}{3}\end{cases}$ β) $\begin{cases}2^{x}\cdot(x+y)=10\\ \sqrt[x]{x+y}=5\end{cases}$

22. Να λυθούν οι ανισώσεις : α) $2^{x^2-1}>\dfrac{1}{2^{11-4x}}$ β) $(0,5)^{x^2-3x+2}\geq 1$ γ) $(x^2+x+3)^{x^2-4x+3}>1$

23. ****** Να λύσετε τις ανισώσεις

i) $3^{x^2-7x+6}<1$ **ii)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}<\left(\frac{1}{4}\right)^{x+\frac{5}{2}}$ **iii)** $(0,5)^{5x-x^2-1}<0{,}125$ **iv)** $4^x-6\cdot 2^x+8<0$

24. Να λυθούν οι ανισώσεις : α) $6^x+6^{x+1}>2^x+2^{x+1}+2^{x+2}$ β) $3^{x+2}+5\cdot 3^x\leq 2\cdot 4^x+4^{x+1}+2^{2x+3}$

25. Να λυθούν οι ανισώσεις : α) $5^{2x-1}+5^{x+1}\geq 250$ β) $3^{x+1}+18\cdot 3^{-x}<29$

26. ****** Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\left(1-k^2\right)^x$.

α) Για ποιες τιμές του k ορίζεται η f;

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του k για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να βρείτε το k ώστε η γραφική παράσταση της $f(x)$ να περνάει από το σημείο $P\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

δ) Να βρείτε τις τιμές του k ώστε η γραφική παράσταση της f να περνάει από το σημείο Σ(2, 1).

27. ****** Σ' ένα ασθενή με υψηλό πυρετό χορηγείται ένα αντιπυρετικό φάρμακο.
Η θερμοκρασία (πυρετός) Θ (t) του ασθενούς t ώρες μετά την λήψη του φαρμάκου δίνεται από τον τύπο $\Theta(t)=36+4\left(\frac{1}{2}\right)^t$ σε βαθμούς Κελσίου.

α) Να βρείτε πόσο πυρετό είχε ο ασθενής τη στιγμή που του χορηγήθηκε το φάρμακο.

β) Να βρείτε σε πόσες ώρες η θερμοκρασία του ασθενούς θα πάρει την φυσιολογική τιμή 36,5°C.

γ) Αν η επίδραση του αντιπυρετικού διαρκεί 4 ώρες πόση θα είναι η θερμοκρασία του ασθενούς μόλις σταματήσει η επίδραση του φαρμάκου.

28. ****** Ένας βιολόγος μελετώντας την ανάπτυξη ενός είδους βακτηριδίων παρατηρεί ότι:

i) 2 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης τα βακτηρίδια ήταν 400.

ii) 4 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης τα βακτηρίδια ήταν 3.200.

Αν ο τύπος που δίνει τον αριθμό των βακτηριδίων αίναι $P(t)=P_o\cdot 2^{kt}$, όπου P(t) ο αριθμός των βακτηριδίων σε χρόνο t, P_0 ο αρχικός αριθμός και k σταθερά που εξαρτάται από το είδος των βακτηριδίων τότε:

α) Να βρείτε τη σταθερά k.

β) Να βρείτε τον αρχικό αριθμό των βακτηριδίων.

γ) Σε πόσα λεπτά ο αρχικός αριθμός των βακτηριδίων είχε διπλασιαστεί;

29. Σε μια αγροτική περιοχή ο πληθυσμός μειώνεται σύμφωνα με το νόμο της εκθετικής μεταβολής Αν ο αρχικός πληθυσμός ήταν 8 χιλιάδες κάτοικοι και σε δύο δεκαετίες έμεινε ο μισός να βρεθούν :

α) Η συνάρτηση που δίνει τον πληθυσμό κάθε χρονική στιγμή

β) Ποιος είναι ο πληθυσμός των αγροτών ύστερα από σαράντα χρόνια
γ) Πόσος χρόνος θα έχει περάσει όταν ο πληθυσμός θα έχει μειωθεί στους χίλιους αγρότες

30. Σε μία πόλη 10 χιλιάδων κατοίκων εμφανίζεται μία μεταδοτική ασθένεια ώστε σε χρόνο t μήνες να προσβάλλονται από αυτήν $N(t) = 10\left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^t\right]$ χιλιάδες κάτοικοι
α) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των κατοίκων που προσβάλλονται συνεχώς αυξάνει
β) Σε πόσους μήνες το πλήθος των προσβληθέντων θα είναι το 20% του πληθυσμού
γ) Αν την χρονική στιγμή t_0 που έχει προσβληθεί το 36% των κατοίκων δίνεται αποτελεσματική αντιβίωση στον πληθυσμό τότε ο αριθμός των κατοίκων που νοσεί δίνεται από τον τύπο $N_1(t) = 3600\left(1 - \eta\mu\frac{\pi t}{t_0}\right)$ κάτοικοι με $t \geq t_0$, να βρεθεί σε πόσους μήνες η ασθένεια θα έχει εξαλειφθεί

31. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(x)=10^{1-x} - x$. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και μετά να λυθεί η εξίσωση f(x)=0.

32. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=e^x + x$. Να βρεθεί η μονοτονία της συνάρτησης και κατόπιν να λυθεί η εξίσωση $e^{x^2-1} - e^{3x^2-9} = -(x^2-1) + (3x^2-9)$.

33. Να αποδείξετε ότι αληθεύουν οι ισότητες : α) $3\log 2 + \frac{1}{2}\log 16 = 5\log 2$ β) $2 + 2\log 2 - 2\log 5 = 4\log 2$

34. Να αποδείξετε ότι αληθεύουν οι ισότητες : α) $\log 3 + 2\log 4 - \log 12 = 2\log 2$
β) $\frac{1}{2}\log 25 + \frac{1}{3}\log 8 + \frac{1}{5}\log 32 = 1 + \log 2$ γ) $3\log 2 + \log 5 = 1 + \log 4$

35. Να αποδείξετε ότι αληθεύουν οι ισότητες : α) $\frac{\log\sqrt{125} + \log\sqrt{27} - \log\sqrt{8}}{\log 15 - \log 2} = \frac{3}{2}$
β) $2\log\frac{5}{2} + \log\frac{3}{11} - \log\frac{40}{77} - \log\frac{105}{32} = 0$

36. Αν x,y>0 και $x^2+y^2=7xy$, να δειχθεί ότι $\log\frac{x+y}{3} = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$

37. Αν α>β>0 και $\alpha^2+\beta^2=11\alpha\beta$, να αποδειχθεί ότι $\log\frac{\alpha-\beta}{3} = \frac{1}{2}(\log\alpha + \log\beta)$

38. Αν α>1 και β>1 να αποδειχθεί ότι $\log(\alpha^2-1)+\log(\beta^2-1)-\log[(\alpha\beta+1)^2-(\alpha+\beta)^2]=0$

39. Αν log2=0,3 να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης
$y = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{2}) + \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}) + \frac{1}{2}\log(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})$

40. Να αποδείξετε ότι $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5 \ ... \ \log_7 8=3$

41. ** Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο (α_ν) ισχύει $\alpha_\rho = k\cdot\alpha_1$, όπου ο α_ρ ο όρος τάξεως ρ, α ο πρώτος της όρος, και λ ο λόγος της να αποδείξετε ότι: $(\rho-1)\log\lambda = \log k$

42. Αν $\alpha,\beta,\gamma,\theta\in R^+-\{1\}$ και οι α,β,γ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\log_\alpha\theta$, $\log_\beta\theta$, $\log_\gamma\theta$ είναι διαδοχικοί όροι αρμονικής προόδου.

43. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο το $\log\alpha$ και δεύτερο όρο το $\log\beta$ είναι $S_\nu=\frac{1}{2}\log\frac{\beta^{\nu(\nu-1)}}{\alpha^{\nu(\nu-3)}}$.

44. Αν $\alpha,\beta,\gamma\in R_+^*$ και $\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha$ και $\frac{\ln\alpha}{\beta-\gamma}=\frac{\ln\beta}{\gamma-\alpha}=\frac{\ln\gamma}{\alpha-\beta}$ να δειχθεί ότι $\alpha^\alpha\cdot\beta^\beta\cdot\gamma^\gamma=1$.

45. Να υπολογισθούν τα αθροίσματα :
α) $S_1=\log 4+\log 4^2+\log 4^3+...+\log 4^\nu$ β) $S_2=1+\ln e^2+\ln e^3+...+\ln e^{200}$

46. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$ α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f

47. β) Να δειχθεί ότι $f(x_1)+f(x_2)=f(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2})$ γ) Να δειχθεί ότι η f είναι περιττή

48. Να δειχθεί ότι : α) $\log\alpha+\log^2\alpha+\log^3\alpha+...+\log\alpha^\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}\log\alpha$

49. Να δειχθεί ότι : α) $\ln\varepsilon\varphi 1°+\ln\varepsilon\varphi 2°+\ln\varepsilon\varphi 3°+...+\ln\varepsilon\varphi 89°=0$

50. Αν α.β.γ είναι πλευρές τριγώνου και ισχύει η σχέση $\frac{\alpha(\beta+\gamma-\alpha)}{\log\alpha}=\frac{\beta(\gamma+\alpha-\beta)}{\log\beta}=\frac{\gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\log\gamma}$ να δειχθεί ότι $\beta^\gamma\gamma^\beta=\alpha^\gamma\gamma^\alpha=\alpha^\beta\beta^\alpha$.

51. Να δείξετε ότι α) $\frac{1}{2}<\log_3 2<\frac{3}{4}$ β) $\frac{\log\alpha+\log\beta}{2}\leq\log\frac{\alpha+\beta}{2}$ γ) $\frac{1}{\log_2 e}+\frac{1}{\log_{\frac{9}{2}} e}>2$

52. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

α) $\log(x-2)+\log(x-1)=\log(2x+8)$ β) $\log(x+1)+2\log\sqrt{5}\,x=2$ γ) $\frac{1}{3}\log(x-1)=\log x-\log 2$

δ) $\log(x+1)-\log 3=\log(2x-3)+\log 7$ ε) $\frac{1}{2}\log(x+2)+\log\sqrt{x-3}=1+\log\sqrt{3}$

53. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :
α) $2\log(2x-1)-\log(3x-2x^2)=\log(4x-3)-\log x$ β) $\log[\log(2x^2+x-11)]=0$ γ) $\log_2(9-2^x)=3-x$

54. Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $\log(3^x+2)=2x\log 3$ β) $x^{\log x}=\frac{1}{10}x^2\sqrt{x}$

γ) $f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{10}{3}$ όπου $f(x)=\frac{2\log x+1}{2\log x-1}$

55. Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $4^{x-3}=3^{x+2}$ β) $x^{\frac{\log x+5}{3}}=10^{5+\log x}$ γ) $e^{3\ln x}=7e^{\ln x}+6$
$|\log x|+\log x=4$.

56. Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $2^{\log_x 9}+32=12\cdot 2^{\log_x 3}$ β) $(\frac{\log x}{2})^{\log^2 x+\log x^2-3}=\log\sqrt{x}$

57. Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $\log(3^{2x-2}+7)=2+\log(3^{x-1}+1)$ β) $x+\log(1+2^x)=x\log 5+\log 6$
γ) $\ln(5^x-2\cdot 3^x)+\ln 27=\ln 71+x\ln 3$ δ) $\ln x+6\log_x e=5$

58. ** Να βρείτε τον θετικό αριθμό x ώστε να ισχύει:
$\log x+\log x^3+\log x^5+\cdots+\log x^{2\nu-1}=2\nu^2$

59. Αν $\log 2$, $\log(2^x-1)$, $\log(2^x+3)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να βρεθεί το x.

60. Να βρεθούν τρεις αριθμοί x,y,z όταν είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, ο x είναι η ακέραια ρίζα της εξίσωσης $x^{\log_3 x-1}=9$ και οι αριθμοί x-2, y, 2z-10 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

61. Να βρεθούν $x\in R$ ώστε οι αριθμοί x, $\sqrt[4]{10x}$, $x^{\log x}$ να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου .

62. Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $2^{x\log_2 9}+2^{x\log_2 6}=2\cdot 2^{x\log_2 4}$

63. Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $x^{\log\frac{3x}{10}}=9\cdot(3x)^{\log 9x^2}$

64. Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $100^{1+\frac{1}{2}\log x}+1000^{\frac{1}{3}\log(x-1)-1}=1$
β) $1000^{\log x}+5\cdot 100^{1+\log x}=10^{2+\log x}+498x^2+200$

65. Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $x^{\log x+\frac{1}{2}}=10^3$ β) $9\cdot 3^{\log_x^2 4}-(\frac{1}{9})^{\log_x\frac{1}{8}}=0$ γ) $x^{\log_3 x^2+\log_3^2 x-10}=\frac{1}{x^2}$

66. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=\ln(2\lambda-5)x^3-\ln\lambda x^2-\ln(\lambda-3)x+\ln 2$. Να βρεθεί ο $\lambda\in R$ ώστε το f(x) να έχει παράγοντα το x-1 .

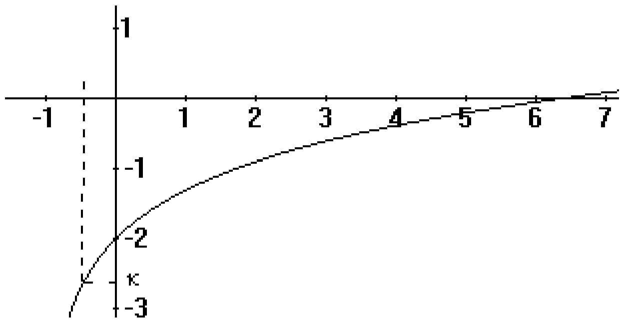
67. Αν σε αριθμητική πρόοδο $\alpha_1=\log_{\eta\mu\frac{\pi}{6}}\sqrt[5]{16}$ και $\alpha_7=2\log_2(2+\sqrt{2})+\log_2(6-4\sqrt{2})$

να υπολογισθεί η διαφορά ω και $S=\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+.......+\alpha_{37}$.

68.. Οι αριθμοί logα, logβ,log4 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου .Αν οι αριθμοί logα-log2β, log2β-log12 , log12-logα είναι επίσης διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και οι αριθμοί α,β,4 μήκη πλευρών τριγώνου , τότε : i)Να προσδιορίσετε τα μήκη α,β ii) Τι είδους τρίγωνο σχηματίζεται; iii) Να βρείτε τα συνημίτονα των γωνιών του τριγώνου.

69. Δίνεται η εξίσωση $\log\theta+\sigma\upsilon\nu^2 x=\eta\mu^2 x$ (1) με θ>0
I) Για ποιες τιμές του θ η (1) έχει λύση ως προς x ;
II) Αν $\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ να λυθεί η εξίσωση
III) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες οι αριθμοί 10, $10^{-\sigma\upsilon\nu x}$, $\dfrac{1}{10^{\eta\mu x}}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου

70. ** Να βρείτε: **α)** τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες η γραφική παράσταση της $f(x)=\ln(x+1)-2$
β) Το k ώστε το σημείο $P\left(-\dfrac{1}{2},k\right)$ να ανήκει στη γραφική της παράσταση



71. Δίνεται η συνάρτηση : f(x) = $\alpha\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ που η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(ln2 , 3) ι) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f(x) ιι) Να βρεθεί το α
ιιι) Να αποδείξετε ότι η f(x) είναι περιττή
ιv) Να βρεθεί το x ώστε η γραφική παράσταση της f(x) να βρίσκεται πάνω από την ευθεία με τύπο y=2

72. Έστω η τιμή Q(t) ενός προϊόντος (σε εκατοντάδες χιλιάδες δραχμές) , έτη μετά την κυκλοφορία του προϊόντος στην αγορά. Η αρχική τιμή του προϊόντος είναι 300.000 δραχμές, ενώ μετά από 6 μήνες η τιμή του είχε μειωθεί στο μισό της αρχικής του τιμής. Αν είναι γνωστό ότι ισχύει $\ln Q(t)=\alpha t+\beta$, t≥0 και $\alpha,\beta\in\Re$ τότε **α)** να δείξετε ότι $Q(t)=3\cdot 4^t$, t≥0
β) Να βρείτε σε πόσο χρόνο η τιμή του προϊόντος θα γίνει το 1/16 της αρχικής τιμής.
γ) Να βρείτε τον ελάχιστο χρόνο για τον οποίο η τιμή του προϊόντος δεν υπερβαίνει το 1/9 της αρχικής του τιμής

73. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(3-2\ln\alpha)^x$.
ι) Να βρεθεί το α ώστε η f(x) να ορίζεται σε όλο το $\Re$
ιι) Να βρεθεί το α ώστε η f(x) να είναι γνησίως φθίνουσα
ιιι) Για $\alpha=\sqrt{e}$ να λυθεί η εξίσωση $f(1+\sigma\upsilon\nu 2\theta)-f(2\eta\mu^2\theta)=3$

74. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x-1)$
ι) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f(x)

ιι) Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f(x) να βρίσκεται πάνω από τον χ΄χ
ιιι)Να συγκρίνετε τους αριθμούς f (ln2) και f(1)
ιν) Να λυθεί η εξίσωση f(2x) – f(x) =f(1)

75. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^{x}+5}\right)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f(x).

β. Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 2ln2 .

γ. Να λύσετε την ανίσωση f(x) > 0.

76. Να λυθούν τα συστήματα : α) $\begin{cases} x^y = y^x \\ x^3 = y^2 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \log x+\log y=\log 14 \\ 3x-y=1 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x^2+y^2=425 \\ \log x+\log y=2 \end{cases}$

77. Να λυθούν τα συστήματα : α) $\begin{cases} x^{\log y+1}=y^{\log x+2} \\ y^{\sqrt{x+2}}=x^{y-2} \end{cases}$ β) $\begin{cases} x^{\log y}+y^{\log x}=20 \\ \log\sqrt{xy}=1 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} 2^x+2^y=12 \\ \log(2x+2)-\log(3+y)=0 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} 4(\log y+\log x)=17 \\ xy=243 \end{cases}$

78. Να λυθούν τα συστήματα : α) $\begin{cases} 2^{\log x}-3^{\log y}=1 \\ 4^{\log x}+9^{\log y}=25 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \sqrt[y]{x}+2x^{\frac{2}{y}}=10 \\ 2\log x+y\log 5=2\log 20 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} x+\log y=1 \\ \sqrt[x]{y^2}+10=11\sqrt[x]{y} \end{cases}$ δ) $\begin{cases} 4\log x+\log y^5=12 \\ \log x^2+\log\sqrt{y}=2 \end{cases}$

79. Να λυθούν τα συστήματα : α) $\begin{cases} y^x(1+y^x)=10100 \\ \log\sqrt{xy}-\log\sqrt{\dfrac{x}{y}}=3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} (2x)^{\log y}+y^{\log(2x)}=8x^2 \\ y=4x^2\cdot y^{\log(2x)} \end{cases}$